

正定矩阵的性质及判别法*

邹黎敏^{1,2}, 胡兴凯¹, 伍俊良¹

(1. 重庆大学数理学院, 重庆 400044; 2. 重庆三峡学院数学与计算机科学学院, 重庆 404000)

摘 要: 得到了正定矩阵对称积, 实部的估计, 谱半径估计以及行列式估计的一些结果。提出了判断矩阵正定性的算法, 并给出了算例。

关键词: 正定矩阵; 对称积; 谱半径; 算法

中图分类号: O241.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 05-0016-08

The Properties and Discrimination of the Positive Definite Matrices

ZOU Limin^{1,2}, HU Xingkai¹, WU Junliang¹

(1. College of Mathematics and Physics of Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. College of Mathematics and Computer Science of Chongqing Three Gorges University,
Chongqing 404000, China)

Abstract: Several results which are about symmetric product, estimation for real part, spectral radius, and determinant of positive definite matrices are obtained. The algorithm for determining positive definiteness of matrices and the numerical examples are shown.

Key words: positive definite matrices; symmetric product; spectral radius; algorithm

正定矩阵的研究一直是矩阵分析领域非常热门的课题。在投入产出的经济数学模型以及多种统计线性模型等理论中, 都得到了很好的应用, 正定矩阵的研究起源于对二次型和 Hermite 型的研究^[1-2]。它的常规定义是

定义 1 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $A = A^T$, 对任意的 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, 都有 $X^T A X > 0$, 则称 A 为对称正定矩阵, 记

$$P(n, I) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = A^T, \\ \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}^n, X^T A X > 0\}$$

定义 2 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 若 $A = A^*$, 对任意的 $0 \neq X \in \mathbb{C}^n$, 都有 $X^* A X > 0$, 则称 A 为 Hermite 正定矩阵, 记

$$P(n, II) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A = A^*, \\ \forall 0 \neq X \in \mathbb{C}^n, X^* A X > 0\}$$

1970 年和 1985 年, Johnson 和李炯生在文 [1] 和 [2] 中分别提出了正定矩阵较为广义的定义, 其定义如下

定义 3 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若对任意的 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, 都有 $X^T A X > 0$, 则称 A 为第一类广义正定矩阵, 记

$$P(n, III) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \\ \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}^n, X^T A X > 0\}$$

这种较为广义的正定矩阵的理论在数学规划的最优化算法中, 在严格凸向量函数的检验中以及各种统计线性模型的基本理论中都得到了应用。1984 年, 佟文廷^[3]把正定矩阵的定义作了如下推广

定义 4 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若对任意的 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, 存在正对角矩阵 $D > 0$, 使得 $X^T D A X > 0$, 则称 A 为第二类广义的正定矩阵, 记

* 收稿日期: 2008-09-26

基金项目: 重庆市科委科学研究基金资助项目 (2005CF9057); 重庆大学研究生科技创新基金资助项目 (200801A1A0070266)

作者简介: 邹黎敏 (1984 年生), 男, 助教, 硕士; E-mail: limin-zou@163.com

$$P(n, IV) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}^n, \\ \exists D > 0, X^T D A X > 0\}$$

文 [3] 给出了这种广义正定矩阵类的各种等价描述, 由此得出了一系列结果, 并且指出了它们与稳定矩阵等的联系以及在稳定矩阵研究中的应用, 这对矩阵论的理论与应用都是大有益处的。1988 年, 夏长富^[4]把实矩阵的正定性作了进一步的推广, 其定义为

定义 5 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若对任意的 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$, 存在对称正定矩阵 S , 使得 $X^T S A X > 0$, 则称 A 为第三类广义的正定矩阵, 记

$$P(n, V) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}^n, \\ \exists S \in P(n, I), X^T S A X > 0\}$$

文 [1-11] 讨论了以上几类正定矩阵的性质以及它们之间的关系, 得到了很多有益的结果。本文在上述文献的基础之上, 首先对正定矩阵的性质做进一步的研究, 得到了正定矩阵对称积, 实部的估计, 谱半径的估计以及行列式估计的一些新结果, 同时给出了判断 Hermite 矩阵为正定矩阵的充要条件。然后给出了判断矩阵正定性的算法, 并给出了算例验证算法的有效性。

1 正定矩阵的性质

我们知道, 两个对称矩阵 A 和 B 的复合 AB 或 BA 一般不是对称的, 但是他们的对称积 $S = AB + BA$ 必定是对称的, 本节首先推广了 [11] 中定理 3.7.2, 然后得到了正定矩阵实部的估计, 谱半径的估计以及行列式估计的一些新结果, 最后给出了判断 Hermite 矩阵为正定矩阵的充要条件, 为此需要以下引理。

引理 1^[11] Hermite 矩阵是半正定的, 当且仅当它的所有特征值都是非负的, 它是正定的, 当且仅当它的所有特征值都是正的。

引理 2^[2] $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 $A \in P(n, III)$ 的充分必要条件是 A 的对称分量

$$S_A = \frac{A + A^T}{2} \in P(n, I)。$$

引理 3^[11] $\mathbb{C}^{n \times n}$ 中所有正定矩阵构成的集合的边界点是半正定矩阵, 但不是正定矩阵。

引理 4^[12] 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则 A 的全部特征值 $\lambda(A)$ 都属于圆盘

$$\lambda(A) \subset \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{\text{tr} A}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|A\|_F^2 - \frac{|\text{tr} A|^2}{n}\right)}\right\} \quad (*)$$

定理 1 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是自共轭矩阵, 若

① $A \in P(n, II)$, ② 对称积 $S = A^p B^q + B^q A^p \in P(n, II)$, 其中 $p, q \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, 则 $B \in P(n, II)$ 。

证明 令 $B^q(t) = B^q + tA^p$ 。现在我们考虑 $A^p, B^q(t)$ 的对称积

$S(t) = A^p B^q(t) + B^q(t) A^p = A^p B^q + B^q A^p + 2tA^{2p}$ 显然, 当 $t \geq 0$ 时, $S(t) \in P(n, II)$ 。因为 $X^* B^q(t) X = X^* B^q X + tX^* A^p X$, 并且 $A \in P(n, II)$, 所以由 Rayleigh-Ritz 定理, 我们有 $X^* A^p X \geq \lambda_n \|X\|^2$, 其中 $\lambda_n > 0$ 是 A^p 的最小特征值, 同时由 Schwarz 不等式我们有 $|X^* B^q X| \leq \|X\| \|B^q X\| \leq \|B^q\| \|X\|^2$ 。所以

$X^* B^q(t) X \geq (t\lambda_n - B^q) \|X\|^2$, 这表明 $t > \frac{\|B^q\|}{\lambda_n}$ 时 $B^q(t) \in P(n, II)$ 。由于 $B^q(t)$ 连续依赖于 t , 假设 $B^q = B^q(0)$ 是非正定的, 则必存在某个 t_0 满足 $0 < t_0 \leq \frac{\|B^q\|}{\lambda_n}$, 使得 $B^q(t_0)$ 处在正定矩阵全体构成的集合的边界上, 由引理 1 和引理 3 知, $B^q(t_0)$ 是半正定的但不是正定的, 其特征值是非负的而且至少有一个为零。故存在非零向量 (对应零特征值的特征向量) Y , 使得 $B^q(t_0)Y = 0$ 。因此有

$$Y^* S(t_0) Y = Y^* A^p B^q(t_0) Y + Y^* B^q(t_0) A^p Y = 0$$

这与 $S(t_0) \in P(n, II)$ 相矛盾, 所以 $B \in P(n, II)$ 。

推论 1 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若① $A \in P(n, III)$, ② 对称积 $S = S_A S_B + S_B S_A \in P(n, I)$, 其中 $S_A = \frac{A + A^T}{2}$, $S_B = \frac{B + B^T}{2}$, 则 $B \in P(n, III)$ 。

证明 因为 $A \in P(n, III)$, 所以由引理 2, 我们知道 $S_A \in P(n, I)$, 所以, 由定理 1, 有 $S_B \in P(n, I)$, 故 $B \in P(n, III)$ 。

定理 2 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 且 $B = B^T$ 若

① $A \in P(n, III)$, ② 对称积 $S = AB + BA \in P(n, III)$, 则 $B \in P(n, I)$ 。

证明 假设 $B \notin P(n, I)$, 所以 B 肯定有小于或等于零的特征值。若有特征值为 $\lambda = 0$, 设 $\lambda = 0$ 所对应的非零实特征向量为 X , 则有 $BX = 0$, 所以

$$X^T S X = X^T A B X + X^T B A X = 0$$

这与 $S = AB + BA \in P(n, III)$ 相矛盾。若有特

征值为 $\lambda < 0$, 设 $\lambda < 0$ 所对应的非零实特征向量为 X , 则有 $BX = \lambda X$, ($\lambda < 0$), 所以 $X^T S X = X^T A B X + X^T B A X < 0$, 这与 $S = AB + BA \in P(n, III)$ 相矛盾。总之, 我们知道假设不成立, 所以 $B \in P(n, I)$ 。

定理 3 设 $A \in P(n, III)$, 则

$$\rho(A) \leq \sqrt{R^2 + 2\lambda_1(S_A) \frac{\text{tr}A}{n} - \left(\frac{\text{tr}A}{n}\right)^2}$$

其中 $\lambda_1(S_A)$ 为 A 的对称分量 $S_A = \frac{A + A^T}{2}$ 的最

大特征值, $R = \sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|A\|_F^2 - \frac{(\text{tr}A)^2}{n} \right)}$ 。

证明 设 A 的任意特征值 $\lambda = \alpha + \beta i$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则由引理 4 有

$$\left| \alpha + \beta i - \frac{\text{tr}A}{n} \right| \leq R$$

故 $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \frac{\text{tr}A}{n} + \left(\frac{\text{tr}A}{n}\right)^2 \leq R^2$, 由文 [2]

定理 2, 有 $\alpha \leq \lambda_1(S_A)$, 所以

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq R^2 + 2\lambda_1(S_A) \frac{\text{tr}A}{n} - \left(\frac{\text{tr}A}{n}\right)^2$$

于是

$$\rho(A) \leq \sqrt{R^2 + 2\lambda_1(S_A) \frac{\text{tr}A}{n} - \left(\frac{\text{tr}A}{n}\right)^2}$$

定理得证。

例 1 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

其对称分量为

$$S_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1.5 \\ 0 & 4 & -0.5 \\ 1.5 & -0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

易知 $S_A \in P(n, I)$, 所以 $A \in P(n, III)$ 。因为 S_A 的最大特征值为 $\lambda_1(S_A) = 4.4593$ 。所以, 由定理 3, 有 $\rho(A) \leq 5.2047$, 直接由引理 4, 仅有 $\rho(A) \leq 6.0551$ 。可见定理 3 对此例的估计是有其优越性的。同时, 还可以知道定理 3 得到的估计比文 [11] 中得到的估计要精确, 但是这并不是说对于任意的 $A \in P(n, III)$, 定理 3 得到的估计都比其它的估计好。

定理 4 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \in P(n, III)$ 且 $C = C^T$ 。对于任何 $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 若 $AP = A^T P$, 则恒有 $\det H \leq \det A \cdot \det(C + P^T B + B^T P + P^T A P)$

并且等号成立的条件是 $AP + B = 0$ 。

证明 根据分块矩阵的乘法, 有

$$Q = \begin{pmatrix} E & 0 \\ P^T & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & P \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AP + B \\ P^T A + B^T & P^T A P + B^T P + P^T B + C \end{pmatrix}$$

两边取行列式, 有

$$\det H = \det Q =$$

$$\det \begin{pmatrix} A & AP + B \\ P^T A + B^T & P^T A P + B^T P + P^T B + C \end{pmatrix}$$

因为 $H \in P(n, III)$, 由文 [8] 命题 2 知 $Q \in P(n, III)$ 。又因为 $AP = A^T P$, $C = C^T$, 所以

$$(AP + B)^T = P^T A + B^T$$

且

$$(P^T A P + B^T P + P^T B + C)^T = P^T A P + B^T P + P^T B + C$$

于是, 由文 [10] 定理 1, 可得

$$\det H \leq \det A \cdot \det(C + P^T B + B^T P + P^T A P)$$

由文 [8] 命题 4, 我们知道 $A \in P(n, III)$, 所以 A 可逆。于是可得

$$\det H = \det A \cdot \det(P^T A P + B^T P + P^T B + C - (P^T A + B^T) A^{-1} (AP + B))$$

所以等号成立的条件是 $AP + B = 0$ 。

例 2 设

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

将 H 按照上面形式进行分块, 则

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

不难验证 H 满足定理 4 的条件, 同时我们可以找到矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.0001 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

满足 $AP = A^T P$, 因此有 $\det H \leq 1485$, 由文 [10] 定理 1, 有 $\det H \leq 4725$, 计算 H 的行列式为 $\det H = 1413$ 。可见, 定理 4 的估计是有其优越

性的, 当然, 这取决于矩阵 P 的选择。对于不同的 P , 可以得到不同的估计, 这样大大提高了估计的灵活性。

定理5 设 $A \in P(n, V)$, 则

$$\frac{\lambda_n(SA + A^T S)}{2\lambda_1(S)} \leq \operatorname{Re}\lambda(A) \leq \frac{\lambda_1(SA + A^T S)}{2\lambda_n(S)}$$

其中 $\lambda_n(SA + A^T S), \lambda_n(S)$ 分别为 $SA + A^T S$ 和 S 的最小特征值, $\lambda_1(SA + A^T S), \lambda_1(S)$ 分别为 $SA + A^T S$ 和 S 的最大特征值。

证明 因为 $A \in P(n, V)$, 则由文 [4] 定理 1 知, 存在 $S \in P(n, I)$, 使 $SA + A^T S \in P(n, I)$ 。设 $\lambda(A)$ 为 A 任意特征值, $0 \neq Z = X + Yi \in \mathbb{C}^n$ 为 $\lambda(A)$ 的特征向量, $X, Y \in \mathbb{R}^n$, 且 X, Y 不同时为零, 由 $AZ = \lambda(A)Z$, 两边左乘 $Z^* S$, 得

$$Z^* SAZ = \lambda(A)Z^* SZ$$

再两边取共轭转置, 有

$$Z^* A^T SZ = \lambda(A)Z^* SZ$$

上两式相加, 可得

$$Z^* (SA + A^T S)Z = 2\operatorname{Re}\lambda(A)Z^* SZ$$

从而

$$X^T (SA + A^T S)X + Y^T (SA + A^T S)Y = 2\operatorname{Re}\lambda(A)(X^T SX + Y^T SY)$$

所以由 Rayleigh-Ritz 定理和 $\operatorname{Re}\lambda(A) > 0$, 有

$$\begin{aligned} \lambda_n(SA + A^T S)(X^T X + Y^T Y) &\leq \\ 2\operatorname{Re}\lambda(A)\lambda_1(S)(X^T X + Y^T Y) \end{aligned}$$

即

$$\frac{\lambda_n(SA + A^T S)}{2\lambda_1(S)} \leq \operatorname{Re}\lambda(A) \quad (1)$$

同时, 有

$$\begin{aligned} \lambda_1(SA + A^T S)(X^T X + Y^T Y) &\geq \\ 2\operatorname{Re}\lambda(A)\lambda_n(S)(X^T X + Y^T Y) \end{aligned}$$

即

$$\frac{\lambda_1(SA + A^T S)}{2\lambda_n(S)} \geq \operatorname{Re}\lambda(A) \quad (2)$$

由 (1) 和 (2), 可得

$$\frac{\lambda_n(SA + A^T S)}{2\lambda_1(S)} \leq \operatorname{Re}\lambda(A) \leq \frac{\lambda_1(SA + A^T S)}{2\lambda_n(S)}$$

定理得证。

注1 若 $A \in P(n, V)$, 结合定理 3 的证明方法和定理 5, 可以得到谱半径的估计, 我们将其留给读者。

例3 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

易知 $A \notin P(n, III)$, 但我们可以找到

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in P(n, I)$$

使得 $SA + A^T S \in P(n, I)$, 所以 $A \in P(n, V)$ 。计算可得

$$SA + A^T S = \begin{pmatrix} 10 & 17 & 3 \\ 17 & 32 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in P(n, I)$$

经过计算有 $\lambda_1(SA + A^T S) = 42.1384$, $\lambda_n(SA + A^T S) = 0.7267$, $\lambda_1(S) = 5.0000$, $\lambda_n(S) = 1.5858$ 。所以, 由定理 5, 有

$$0.0727 \leq \operatorname{Re}\lambda(A) \leq 13.2862$$

直接计算 A 的特征值为

$$\lambda_1 = 0.2087, \lambda_2 = 4.7913, \lambda_3 = 1.0000$$

可见定理 5 的估计是有效的。

对于任意的复矩阵 A , 可以将其分解为 $A = A_1 + A_2 i \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。定义实矩阵

$$A_R = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

为复矩阵 A 的实表示矩阵, 简称实表示。令 $f: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, 则对于任意的 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 有

$$f(AB) = f(A)f(B), f(A+B) = f(A) + f(B)$$

显然 f 是一对一, 且保持运算, 所以 f 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 到 $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 的环同构, 所以这种分解是唯一的。

定理6 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则 $A \in P(n, II)$ 的充分必要条件为 $A_R \in P(n, I)$ 。

证明 结果是显然的。

2 正定矩阵的判别法

本节将给出一些比较容易的方法来判断一个矩阵是否是正定矩阵。由定理 6 和文 [2] 定理 1, 我们知道, 要判断一个矩阵 $A \in P(n, II)$ 或是 $A \in P(n, III)$, 只需判断其实表示矩阵 A_R 或是对称分量 S_A 是对称正定矩阵, 故下面我们只给出判断一个矩阵是否是对称正定矩阵的简单判别法。

定理7 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $A = A^T$ 且 $\frac{\operatorname{tr} A}{n} >$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|A\|_F^2 - \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{n} \right)}, \text{ 则 } A \in P(n, I)。$$

例4^[14] 设

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ 1 & 9 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

容易知道

$$\frac{\text{tr}A}{n} = 7.6667 > \sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|A\|_F^2 - \frac{|\text{tr}A|^2}{n} \right)}$$

$$= 5.6960$$

由定理7有 $A \in P(n, I)$ 。

由引理4和定理7, 不难看出, 为了判断一个对称矩阵是否是正定矩阵, 实际上就是判断包含矩阵所有特征值的圆盘的半径与圆心到原点的距离之间的大小。我们知道, 在 Gerschgorin 圆盘定理中, 可以找到可逆矩阵 P , 它能够为得到特征值的一个更令人满意的估计提供很大的灵活性。同理, 对于任意给定的矩阵 A , 可以找到可逆矩阵 P 来对矩阵 A 进行相似变换, 使得 $\|P^{-1}AP\|_F^2 \leq \|A\|_F^2$ 而不改变矩阵的特征值。我们会想是否可以利用这种方法来找到可逆矩阵 P 使得

$$\frac{\text{tr}A}{n} \leq \sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|A\|_F^2 - \frac{|\text{tr}A|^2}{n} \right)}$$

转化为

$$\frac{\text{tr}A}{n} > \sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|P^{-1}AP\|_F^2 - \frac{|\text{tr}A|^2}{n} \right)}$$

这样, 就可以扩大定理7的适用范围。但遗憾的是, 有下面的引理。

引理5 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 若 A 为正规矩阵, 则不存在可逆矩阵 P 使得 $\|P^{-1}AP\|_F^2 < \|A\|_F^2$ 。

证明 令 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 由 Schur 不等式以及 A 为正规矩阵, 有

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \|A\|_F^2$$

对于任意的可逆矩阵 P , $P^{-1}AP$ 和 A 有相同的特征值但不一定是正规矩阵, 所以

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|P^{-1}AP\|_F^2$$

于是, 对于任意的可逆矩阵 P , 都有

$$\|P^{-1}AP\|_F^2 \geq \|A\|_F^2$$

引理得证。

由引理5, 我们知道不可能通过相似变换来扩大定理7的适用范围。很显然, 引理4(*)式中圆盘的圆心是 $\left(\frac{\text{tr}A}{n}, 0\right)$, 当 A 给定之后, 它和原点之间的距离就是一个定值。要扩大定理7的适用范围, 很自然的是要减小以 $\left(\frac{\text{tr}A}{n}, 0\right)$ 为圆心, 包含矩阵所有特征值的圆盘的半径, 最好是将其半径减小到最小。对于给定的矩阵, 由几何学知道, 当圆心

确定为 $\left(\frac{\text{tr}A}{n}, 0\right)$ 之后, 最小半径就是: 离圆心最远的那个特征值和圆心之间的距离。于是, 可以得到如下求解最小半径的优化模型

$$\begin{cases} \max \left| \lambda - \frac{\text{tr}A}{n} \right| \\ \text{s. t. } f(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

其中

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n$$

且

$$c_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det A(i_1, \dots, i_k), k = 1, 2, \dots, n$$

对于对称矩阵, 从优化模型(*)可以导出如下两个优化模型

$$(I) \begin{cases} \max \left(\lambda - \frac{\text{tr}A}{n} \right) \\ \text{s. t. } f(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} \min \left(\lambda - \frac{\text{tr}A}{n} \right) \\ \text{s. t. } f(\lambda) = 0 \end{cases}$$

这样, 优化模型(*)的最优解等于优化模型(I)和(II)的最优解的绝对值的最大值。记优化模型(*), 优化模型(I)和(II)的最优解分别为 $R_{\min}$, s_1 和 s_2 , 则

$$R_{\min} = \max(|s_1|, |s_2|)$$

优化模型(I)和(II)是带等式约束的最优化问题, 在 MATLAB 的优化工具箱中有一个求解上述非线性规划的问题的函数 fmincon, 用此函数求解上述问题非常简单方便, 但要求输入极小值点的初始近似值, 鉴于此, 可以首先利用引理4, 得到矩阵特征值的一个比较精确的范围, 然后再进行求解, 于是有

定理8 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $A = A^T$ 且 $\frac{\text{tr}A}{n} > R_{\min}$, 则 $A \in P(n, I)$ 。

例5 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

容易知道

$$\frac{\text{tr}A}{n} = 4.6667 = \sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|A\|_F^2 - \frac{|\text{tr}A|^2}{n} \right)}$$

$$= 4.6667$$

所以不满足定理7的条件, 我们计算可得 $\left(\frac{\text{tr}A}{n} = 4.6667, 0\right)$ 为圆心, 包含矩阵所有特征值

的圆盘的最小半径 $R_{\min} = 4.053\ 9$, 故由定理 8 有 $A \in P(n, I)$ 。

前面我们找到了以 $(\frac{\text{tr}A}{n}, 0)$ 为圆心, 包含矩阵所有特征值的圆盘的最小半径, 扩大了定理 7 的适用范围, 得到了定理 8。但是, 以 $(\frac{\text{tr}A}{n}, 0)$ 为圆心, $R_{\min}$ 为半径的圆盘是否是包含矩阵所有特征值的最小圆盘? 通常不是的, 我们可以举出很多例子。那么, 现在就需要找到包含矩阵所有特征值的最小圆盘。由引理 4, 可以得到矩阵特征值所在的大概区域, 对于对称矩阵来说, 就是实轴上的一个区间 $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, 那么包含矩阵所有特征值的最小圆盘的圆心的横坐标必定就在区间 $[a, b]$ 之中, 于是, 可以先取定一个点, 不失一般性, 假设选取 $x = a$, 由优化模型 (※), 求得以 $(x = a, 0)$ 这个点为圆心, 包含矩阵所有特征值的最小圆盘的半径, 记为 R_1 。然后选取一个迭代步长 ε , 遍历整个区间 $[a, b]$, 得到以不同点为圆心, 包含矩阵所有特征值的最小圆盘的半径序列 R_i , 再从序列 R_i 找出最小值, 这样, 就找到了包含矩阵所有特征值的最小圆盘, 记其圆心为 $O(x_0, 0)$, 半径为 $R'_{\min}$, 圆心与原点的距离为 $|oO| = |x_0|$, 于是, 找到包含实对称矩阵全部特征值的最小圆盘的算法如下面伪代码所述:

算法 1

输入实对称矩阵 A 和迭代步长 ε

(1) 找到 A 的特征值的一个所属区域 $[a, b]$;

(2) 选取初始迭代点, 不失一般性, 假设为 $x = a$

(3) for ($x = a; x = x + \varepsilon; x \leq b$)

求得以 $(x, 0)$ 这个点为圆心, 包含 A 所有特征值的最小圆盘的半径, 记为 R_i

end

(4) 找到 R_i 的最小值 $R'_{\min}$ 和圆心 $O(x_0, 0)$

于是, 有下面的定理 9。

定理 9 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $A = A^T$ 且 $x_0 > R'_{\min}$, 则 $A \in P(n, I)$ 。

例 6 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

容易知道

$$\frac{\text{tr}A}{n} = 4.666\ 7 < \sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|A\|_F^2 - \frac{|\text{tr}A|^2}{n} \right)}$$

$$= 5.077\ 2$$

所以不满足定理 7 的条件, 我们计算可得 $(\frac{\text{tr}A}{n} = 4.666\ 7, 0)$ 为圆心, 包含矩阵所有特征值的圆盘的最小半径 $R_{\min} = 4.775\ 7$, 故不满足定理 8 的条件。但由算法 1 的步骤, 首先由引理 4, 我们得到矩阵 A 的特征值所在的区间为 $[-0.410\ 5, 9.743\ 9]$, 选取初始迭代点为 $x = -0.410\ 5$ 以及迭代步长 $\varepsilon = 0.001$ 遍历整个区间 $[-0.410\ 5, 9.743\ 9]$, 找到包含矩阵 A 的所有特征值的最小圆盘的圆心为 $O(x_0 = 5.114\ 5, 0)$, 半径为 $R'_{\min} = 4.328\ 2$, 故由定理 9 有 $A \in P(n, I)$ 。

例 7 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 2+2i \\ 1-i & 4 & 3-i \\ 2-2i & 3+i & 5 \end{pmatrix}$$

显然 A 是自共轭矩阵, 其实表示矩阵

$$A_R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

容易知道

$$\frac{\text{tr}A_R}{n} = 3.666\ 7 < \sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|A_R\|_F^2 - \frac{|\text{tr}A_R|^2}{n} \right)}$$

$$= 8.628\ 1$$

所以不满足定理 7 的条件, 我们计算可得 $(\frac{\text{tr}A_R}{n} = 3.666\ 7, 0)$ 为圆心, 包含矩阵所有特征值的圆盘的最小半径 $R_{\min} = 5.364\ 8$, 故不满足定理 8 的条件。但由上面算法 1 的步骤, 首先由引理 4, 我们得到矩阵 A 的特征值所在的区间为 $[-4.961\ 4, 12.294\ 8]$, 于是选取初始迭代点为 $x = -4.961\ 4$ 以及迭代步长 $\varepsilon = 0.001$ 遍历整个区间 $[-4.961\ 4, 12.294\ 8]$, 找到包含矩阵 A 的所有特征值的最小圆盘的圆心为 $O(x_0 = 4.575\ 6, 0)$, 半径为 $R'_{\min} = 4.455\ 9$, 故由定理 9 有 $A_R \in P(n, I)$, 所以 $A \in P(n, II)$ 。

例 8^[8] 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

显然 A 不是对称矩阵, 其对称分量

$$S_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

容易知道

$$\frac{\text{tr} S_A}{n} = 2.3333 >$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n} \left(\|S_A\|_F^2 - \frac{|\text{tr} S_A|^2}{n} \right)} = 2.1082$$

由定理7有 $S_A \in P(n, I)$, 所以 $A \in P(n, III)$ 。

3 应用

稳定性是控制系统最重要的问题, 也是对系统最起码的要求。1877年 Routh, 1895年 Hurwitz 分别研究了系统的稳定性与特征方程系数的关系, 并分别给出了线性系统稳定性的代数判据, 至今仍有广泛应用。

若系统特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

则系统的 Hurwitz 矩阵 H 由特征方程的系数按下述规则构成: 主对角线上元素为特征方程自 a_{n-1} 至 a_0 的系数, 每行以主对角线上的系数为准, 若向左, 系数的注脚号码依次下降; 若向右, 系数的注脚号码则依次上升, 注脚号码若大于 n 或小于零时, 此系数为零。

Hurwitz 判据为: 系统稳定的充分必要条件是 $a_n > 0$ 的情况下, 对角线上所有顺序主子式均大于零。当系统的 Hurwitz 矩阵的阶数 n 较大时, 应用 Hurwitz 判据比较麻烦, 故它常应用于 n 较小的场合。在这里我们改进了 Hurwitz 判据, 避免了计算 Hurwitz 矩阵所有的顺序主子式, 使其对于较大的 n 也是很方便的。

定理10 设线性系统的特征方程

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

的 Hurwitz 矩阵为 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $a_n > 0$ 且 $H \in P(n, III)$, 则线性系统在平衡位置 $x_e = 0$ 是渐进稳定的。

证明 因为 $H \in P(n, III)$, 所以 $\det H > 0$ 且 H 的任何主子阵都属于 $P(n, III)$ 。于是 H 的所有顺序主子式均大于零, 定理得证。

例9 设线性系统的特征方程式为 $s^3 + 7s^2 + 14s + 8 = 0$, 则

$$H = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 8 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

显然 $a_3 = 1 > 0$, 同时有

$$S_H = \begin{pmatrix} 7 & 4.5 & 0 \\ 4.5 & 14 & 3.5 \\ 0 & 3.5 & 8 \end{pmatrix}$$

由定理7知 $S_H \in P(n, I)$, 所以 $H \in P(n, III)$, 所以由定理10知道线性系统在平衡位置 $x_e = 0$ 是渐进稳定的。

文[12]得到了矩阵的所有特征值可以被包含在一个圆盘之中, 借助于带等式约束的优化模型, 我们求得了包含实对称矩阵所有特征值的最小圆盘并给出了判断矩阵是否为正定矩阵的算法。值得注意的是, 对于任意的复矩阵, 是否也可以找到包含其所有特征值的最小圆盘也是个有趣的和值得进一步研究的主题, 鉴于此文的重点在于正定矩阵, 我们将在另外一篇短文中解决这个问题。

参考文献:

- [1] JOHNSON C R. Positive definite matrices [J]. Amer Math Monthly, 1970, 77(3):259-264.
- [2] 李炯生. 实方阵的正定性[J]. 数学的实践与认识, 1985, 15(3):67-73.
LI J S. Positive definite of real square matrices[J]. Mathematics in Practice and Theory, 1985, 15(3):67-73.
- [3] 佟文廷. 广义正定矩阵[J]. 数学学报, 1984, 27(6):801-810.
TONG W T. Generalized positive definite matrices[J]. Acta Mathematica Sinica, 1984, 27(6):801-810.
- [4] 夏长富. 矩阵正定性的进一步推广[J]. 数学研究与评论, 1988, 8(4):499-504.
XIA C F. The further extension of positive definite of matrices[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 1988, 8(4):499-504.
- [5] 游兆永, 袁超伟, 杨尚骏. 几类广义正定矩阵之间的关系及有关性质[J]. 工程数学学报, 1993, 10(2):69-78.
YOU Z Y, YUAN C W, YANG S J. Relations between several classes of generalized positive definite matrices [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1993, 10(2):69-78.
- [6] 孙建东. 关于对广义正定矩阵的进一步研究[J]. 高等学校计算数学学报, 1996, 18(1):93-96.
SUN J D. Researches of improper positive definite matrix [J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 1996, 18(1):93-96.
- [7] 沈光星. 广义正定矩阵及其性质[J]. 高等学校计算数学学报, 2002, 24(2):186-192.
SHEN G X. Generalized positive definite matrices and its property[J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2002, 24(2):186-192.

- [8] 屠伯坝. 亚正定阵理论 (I) [J]. 数学学报, 1990, 33(4): 462 - 471.
TU B X. Theory of sub-positive definite matrix (I) [J]. Acta Mathematica Sinica, 1990, 33(4): 462 - 471.
- [9] 屠伯坝. 亚正定阵理论 (II) [J]. 数学学报, 1991, 34(1): 91 - 102.
TU B X. Theory of sub-positive definite matrix (II) [J]. Acta Mathematica Sinica, 1991, 34(1): 91 - 102.
- [10] 杨新民. 亚正定矩阵的行列式的一个不等式 [J]. 数学的实践与认识, 1994, 24(2): 45 - 47.
YANG X M. An inequality of determinant of sub-positive definite matrix [J]. Mathematics in Practice and Theory, 1994, 24(2): 45 - 47.
- [11] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
CHEN J L, CHEN X H. Special matrix [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.
- [12] 古以熹. 矩阵特征值的分布 [J]. 应用数学学报, 1994, 17(4): 501 - 511.
GU Y X. The distribution of eigenvalues of a matrix [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1994, 17(4): 501 - 511.
- [13] 葛人溥. 正元素对称矩阵正定性的简单判别法 [J]. 工程数学学报, 1984, 2(1): 151 - 154.
GE R P. The simple discrimination of positive definite of symmetric matrix of positive entries [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1984, 2(1): 151 - 154.
- [14] 李磊. 关于正元素对称矩阵正定性的判别法 [J]. 工程数学学报, 1988, 6(1): 108 - 110.
LI L. The discrimination of positive definite of symmetric matrix of positive entries [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1988, 6(1): 108 - 110.

(上接第 15 页)

- [9] LI Y M, WEI H Q, WANG Y M. On p-nilpotency of finite groups with some subgroups S-quasinormally embedded [J]. Acta Math Hungar, 2005, 108(4): 283 - 298.
- [10] KEGEL O H. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen [J]. Math Z, 1962, 78: 205 - 221.
- [11] DESKINS W E. On quasinormal subgroups of finite groups [J]. Math Z, 1963, 82: 125 - 132.
- [12] SCHMID P. Subgroups permutable with all sylow subgroups [J]. J Algebra, 1998, 207: 285 - 293.
- [13] LI S R, HE X L. On normally embedded subgroups of prime power order in finite groups [J]. Comm Algebra, 2008, 36(6): 2333 - 2340.
- [14] DOERK R, HAWKES T. Finite soluble groups [M]. Berlin-New York: Walter De Gruyter, 1992.
- [15] TATE J. Nilpotent quotient groups [J]. Topology, 1964, 3: 109 - 111.
- [16] ASAAD M. On the supersolvability of finite groups [J]. Annales Univ Sci Budapest, XIII, 1975, 18: 3 - 7.